

Applications - Chapitre 5

Coordonnées cylindriques, sphériques et rotations



A.5.1 Puck retenu par un ressort

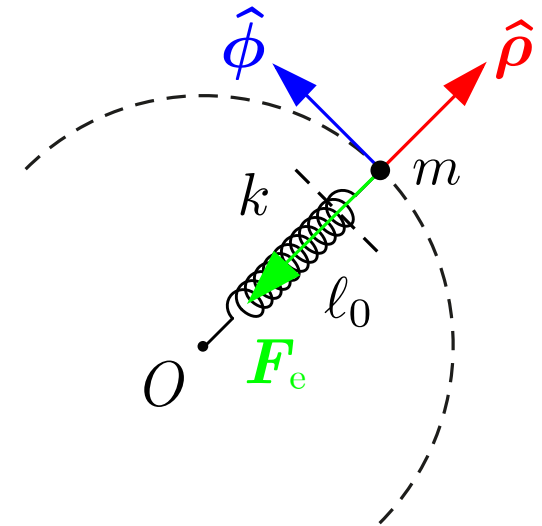
A.5.2 Puck sur un disque tournant

A.5.1 Puck retenu par un ressort

A.5.2 Puck sur un disque tournant

- Un puck de masse m attaché à un ressort de constante élastique k et de longueur à vide ℓ_0 glisse sans frottement sur un plan horizontal.
- Force extérieure (plan horizontal) :
 - 1 Force élastique :

(A.5.1)



- Accélération (coordonnées polaires) :

(A.5.2)

- Loi du mouvement (puck) :

(A.5.3)

selon $\hat{\rho}$:

(A.5.4)

selon $\hat{\phi}$:

(A.5.5)

- Equation du mouvement tangentiel (A.5.5) divisée par m :

$$(A.5.6)$$

- Equation (A.5.6) mise sous la forme :

$$\xrightarrow{\cdot dt}$$

$$(A.5.7)$$

- Intégration de l'équation (A.5.7) : de $t = 0$ à t

$$(A.5.8)$$

- Résultat de l'équation intégrale (A.5.8) :

$$(A.5.9)$$

- Identités logarithmiques sur (A.5.9) :

$$(A.5.10)$$

- Exponentiation de (A.5.10) :

$$(A.5.11)$$

- Equation du mouvement radial (A.5.4) :

$$(A.5.12)$$

- Changement de variable :

$$(A.5.13)$$

- Equation du mouvement radial (A.5.12) :

$$(A.5.14)$$

1

(OH)

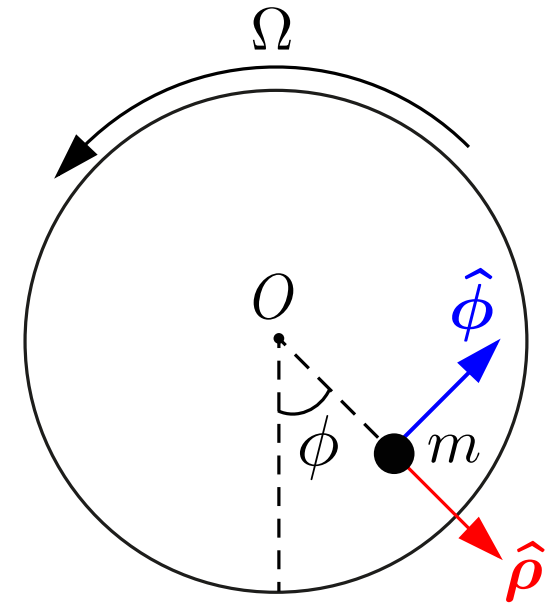
2

(MCU)

A.5.1 Puck retenu par un ressort

A.5.2 Puck sur un disque tournant

- Un puck de masse m glisse sans frottement sur un disque horizontal tournant à vitesse angulaire $\Omega = \text{cste}$ dans le sens trigonométrique autour de l'axe vertical passant par son centre O .
- La vitesse angulaire totale $\Omega + \dot{\phi}$ est la somme de la vitesse angulaire Ω de rotation disque par rapport au sol et de la vitesse angulaire $\dot{\phi}$ de rotation du puck par rapport au disque.
- Il n'y a pas de force extérieure dans le plan horizontal. L'accélération dans le plan horizontal est nulle :



$$(A.5.15)$$

selon $\hat{\rho}$:

$$(A.5.16)$$

selon $\hat{\phi}$:

$$(A.5.17)$$

- Composante de l'accélération selon $\hat{\phi}$ nulle :

$$(A.5.17)$$

- Equation (A.5.17) mise sous la forme :

$$\frac{\cdot dt}{d\Omega = 0} \longrightarrow (A.5.18)$$

- Intégration de l'équation (A.5.18) : de $t = 0$ à t

$$(A.5.19)$$

- Résultat de l'équation intégrale (A.5.19) :

$$(A.5.20)$$

- Identités logarithmiques sur (A.5.20) :

$$\Rightarrow \quad (A.5.21)$$

- Exponentiation de (A.5.21) :

$$\Rightarrow \quad (A.5.22)$$

où L est la norme du moment cinétique du puck par rapport à l'origine.

- On dépose le puck en position $\rho_0 > 0$ sans vitesse initiale par rapport au disque ($\dot{\phi}_0 = 0$) :

$$(A.5.22) \quad \Rightarrow \quad (A.5.23)$$

- En substituant (A.5.23) dans l'équation du mouvement radial (A.5.16) :

$$(A.5.24)$$

- L'accélération radiale est positive, i.e. $\ddot{\rho} > 0$, ainsi la coordonnée de position radiale ρ augmente. Ainsi, d'après la relation (A.5.23), la vitesse angulaire $\dot{\phi}$, initialement nulle, devient de plus en plus négative.
- Vitesse angulaire relative limite ($t \rightarrow \infty$) :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\phi} = \lim_{t \rightarrow \infty} - \left(1 - \underbrace{\quad}_{\rightarrow} \right) \quad (A.5.25)$$

- On multiplie l'équation du mouvement radial (A.5.24) par la vitesse radiale $\dot{\rho}$:

$$(A.5.26)$$

- En multipliant l'équation (A.5.26) par dt :

$$(A.5.27)$$

- Intégration de l'équation (A.5.27) : de $t = 0$ à t

$$(A.5.28)$$

- Résultat de l'équation intégrale (A.5.28) : multiplié par la masse m

$$(A.5.29)$$

- L'équation (A.5.29) peut être mise sous la forme :

$$(A.5.30)$$

où T est l'énergie cinétique du puck par rapport au sol.

- En élevant (A.5.22) au carré et en divisant par m^2 avec $\dot{\phi}_0 = 0$:

$$(A.5.31)$$

- En substituant (A.5.31) dans (A.5.30) avec $\dot{\phi}_0 = 0$, on obtient :

$$(A.5.32)$$

- Ainsi, la norme de la vitesse est constante :

$$(A.5.33)$$